Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD. Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Erklären Sie anhand der Ringerweiterungen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, in welcher Hinsicht die Eigenschaft eines Ringes, ganz-abgeschlossen zu sein, eine schwächere Eigenschaft ist, als die eines Körpers, algebraisch abgeschlossen zu sein.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei R ein integrer Ring (Integritätsbereich) und betrachte eine Körpererweiterung $L/\mathrm{Quot}(R)$. Sei nun $x \in L$ Nullstelle eines Polynomes $f \in R[x]$ mit Leitkoeffizient $a \in R$. Zeigen Sie, dass x ganz über $R[\frac{1}{a}]$ ist und ax ganz über R ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Zeigen Sie, dass dann auch

(i) $R/(I \cap R) \subseteq S/I$ für jedes Ideal $I \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung ist.

(ii) $R[x] \subseteq S[x]$ eine ganze Ringerweiterung ist (wobei x eine Unbestimmte ist).

Aufgabe 4 (5 Punkte): Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^2 - x^3)$.

(i) Zeigen Sie, dass R nicht ganz-abgeschlossen ist.

(ii) Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von R (in $\mathrm{Quot}(R)$).